مثال:

لنأخذ الفضاء الطبولوجي $\mathbb{R}$ ولنعرف في $\mathbb{R}$ علاقة تكافؤ ρ على النحو التالي:

$$x \rho y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

أي نعتبر العنصرين x , y متكافئين إذا كان الفرق بينهما عدداً عادياً.

$$[x]_\rho = [x] = \{ x + q \ ; \ q \in \mathbb{Q} \ ; \ x \in \mathbb{R} \} .$$

كل صف تكافؤ هو عنصر واحد في مجموعة القسمة بينما هو مجموعة جزئية في $\mathbb{R}$ وهذه المجموعة كثيفة لأن $\mathbb{Q}$ كثيفة.

* سنبين أن طبولوجيا القسمة هي طبولوجيا ضعيفة أي

$$\tau / \rho = \{ \emptyset , \mathbb{R}/\rho \}$$

الإثبات: نأخذ مجموعة مغلقة غير خالية F في $\mathbb{R}/\rho$ ونأخذ التطبيق القانوني

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\rho$$

$$\gamma(x) = [x] .$$

هذا التطبيق كما نعلم مستمر وبالتالي الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة وفقه هي مجموعة مغلقة $\gamma^{-1}(F)$ مغلقة

وبما أنها مغلقة فإن $\overline{\gamma^{-1}(F)} = \gamma^{-1}(F) = \mathbb{R}$ وهي مجموعة كثيفة وبالتالي فإن:

$F = \mathbb{R}/\rho$ معنى ذلك أن في هذا الفضاء مجموعتين مغلقتين فقط هما $\{ \emptyset , \mathbb{R}/\rho \}$ وبالتالي الطبولوجيا ضعيفة.

فضاء الجداء:

لنفرض أن لدينا أسرة من الفضاءات الطبولوجية $\{ (X_\alpha , \tau_\alpha) \}_{\alpha \in I}$ و $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ مجموعة الجداء الديكارتي للمجموعات X_α.

بقصد السهولة سنبدأ بحالة فضائين اثنين.

ليكن لدينا (X_1 , τ_1) و (X_2 , τ_2) فضائين طبولوجيين و $X = X_1 \times X_2 = \{ (x_1 , x_2) \ ; \ x_1 \in X_1 , x_2 \in X_2 \}$

نرمز بـ B لأسرة المجموعات من الشكل:

$$\{ U_1 \times U_2 : U_1 \in \tau_1 , U_2 \in \tau_2 \}$$

من الواضح أن تقاطع أي مجموعتين من عناصر الأسرة B هو مجموعة من عناصر B

استناداً إلى مبرهنة سابقة فإن الأسرة B تشكل قاعدة لطبولوجيا على المجموعة X (مجموعة الجداء الديكارتي) تسمى طبولوجيا الجداء.

إن كلاً من الفضائين X_1 , X_2 يسمى فضاء إحداثياً أو مركبة لنأخذ التطبيقين:

Date : / / Subject:

$$P_1 : X = X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1$$
$$P_1(x_1, x_2) = x_1$$
$$P_2 : X = X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$$
$$P_2(x_1, x_2) = x_2$$

حيث P_1, P_2 تطبيقي الاسقاط على X_1, X_2 إن تطبيقي الاسقاط P_1, P_2 مستمران بالنسبة لطبولوجيا الجداء P_1 مستمر لأنه إذا كان: $u_1 \in \tau_1$ فإن صورتها العكسية وفق التطبيق P_1 أي $P_1^{-1}(u_1) = u_1 \times X_2$ وهو عنصر من عناصر طبولوجيا الجداء أي أنه مجموعة مفتوحة. وبالتالي فإن التطبيق P_1 مستمر وبشكل مماثل نبرهن أن P_2 مستمر

* يمكن تعميم الحالة السابقة إلى حالة أي عدد منته من الفضاءات الطبولوجية أي: إذا كانت لدينا اسرة منتهية من الفضاءات الطبولوجية $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2) — (X_n, \tau_n)$ فإننا نستطيع تعريف الطبولوجيا على مجموعة الجداء الديكارتي:

$$X = X_1 \times X_2 \times — \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$$
$$= \{ (x_1, x_2, — x_n) ; x_i \in X_i , i = 1, 2 — n \}$$

نستطيع تعريف الطبولوجيا على جداء ديكارتي بواسطة B

$$\{ u_1 \times u_2 \times — \times u_n ; u_i \in \tau_i \}$$

هذه الأسرة تشكل قاعدة لطبولوجيا على X في قاعدة طبولوجيا الجداء وتكون بطبيعة الحال جميع تطبيقات الاسقاط مستمرة

$$P_i : X \longrightarrow X_i ; (i = 1, 2, —, n)$$

ننتقل الآن إلى حالة الجداءات اللانهائية:

هنا لا نستطيع ان نعمم الحالة السابقة بشكل تلقائي لأن جداء عدد لانهائي من المجموعات المفتوحة ليست بالضرورة ان تكون مجموعة مفتوحة

يبرهن بسهولة أنّ جميع تطبيقات الاسقاط مفتوحة $P_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$

u مفتوحة في X فإن الصورة المباشرة لها هي:

$$P_\alpha(u) = \begin{cases} X_\alpha \in \tau_\alpha \\ u_\alpha \in \tau \end{cases}$$

مجموعة مفتوحة

ملاحظة: أن تطبيق الاسقاط ليس من الضروري أن يكون مغلقاً وسنعطي المثال التالي:

مثال ١: لنأخذ في المستوي R^2 المنحني C معطى بالمعادلة [illegible]

$xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

C مجموعة مغلقة ومسقطها على المحور الأفقي او السينات هو

$]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ وهذه المجموعات مفتوحة اي هنا نلاحظ

فمثلا هذا مجموعة مغلقة ليس مغلقة لكن هنا مستمرة ومفتوحة